8 SAYILABİLİRLİK ÖZELLİKLERİ

8.1 Ayrılabilir ve Birinci Sayılabilir Uzay

Bu bölüme, daha önce tanımını verdiğimiz, yoğun küme tanımını tekrar vererek başlayalım.

Tanım: (X,τ) topolojik uzay ve $M\subset X$ olsun. $\overline{M}=X$ ise M'ye X'de yoğun denir.

Örnekler: 1) $(\mathbb{R},\tau)$'da $M=\mathbb{Q}$ ve $M=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ kümeleri yoğundur. Eğer A, $\mathbb{R}$'de sayılabilir bir küme ise $\overline{\mathbb{R}-A}=\mathbb{R}$ olduğundan, $\mathbb{R}-A$ yoğun kümedir. Örneğin $\overline{\mathbb{R}-\{a\}}=\mathbb{R}$ dir.

2) (X,τ) diskirit topolojik uzay ise $\overline{M}=X$ olması için gerek ve yeter şart $M=X$ olmasıdır.

3) $(\mathbb{R},\tau_L)$ sol topolojisinde (Yani, $\tau_L=\{(-\infty,a)\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset\}$) $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ ve $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$ dır. Fakat, $\overline{\mathbb{N}}=[0,\infty)$ dur. $A=-\mathbb{N}=\{\dots,-n,\dots,-1,0\}$ ise $\overline{A}=\mathbb{R}$ dir.

Teorem: (X,τ) topolojik uzayında M kümesinin yoğun olması için gerek ve yeter şart her $U\in\tau$, $U\neq\emptyset$ için $U\cap M\neq\emptyset$ olmasıdır.

Kanıt: M, yoğun küme ve öyle $\emptyset\neq U\in\tau$ olsun ki $U\cap M=\emptyset$ olsun. $X-U$ kapalı ve $M\subset X-U\neq X$ olduğundan $\overline{M}=X$ olamaz, çelişki. Her $\emptyset\neq U\in\tau$ için $U\cap M\neq\emptyset$ dir.

Tersine, her $\emptyset\neq U\in\tau$ kümesi için $U\cap M\neq\emptyset$ olsun. Kabul edelim ki $\overline{M}\neq X$ dir. $X-\overline{M}$ açık küme ve $(X-\overline{M})\cap M=\emptyset$ olduğundan çelişki yaratır. $\overline{M}=X$ dir. ■

Tanım: (X,τ) topolojik uzayında, sayılabilir yoğun küme varsa, bu uzaya ayrılabilir uzay denir.

Örnekler: 1) $(\mathbb{R},\tau)$'da $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ olduğundan ayrılabilirdir.

2) (X,τ) diskirit topolojisinin ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart X'in sayılabilir olmasıdır.

3) $(\mathbb{R},\tau_L)$ sol topolojisi, $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$ olduğundan ayrılabilirdir.

Teorem: (X,τ) topolojik uzay ve $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ayrık açık kümeler ailesi olsun. Bu uzay ayrılabilir değildir. X sayılamaz bir küme.

Kanıt: $\overline{M}=X$ olsun. $\alpha,\beta\in I$ ve $U_\alpha\cap U_\beta=\emptyset$ olduğundan $x_\alpha\in U_\alpha\cap M$ ve $x_\beta\in U_\beta\cap M$ için $x_\alpha\neq x_\beta$ dır. U_α'ların sayısı sayılamaz olduğundan $\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}\subset M$ kümesi sayılamazdır. Yani, M sayılamazdır, dolayısıyla X ayrılabilir değildir. ■

Örnek: E herhangibir sonsuz küme ve $X=\{f: E\to\mathbb{R} \mid f \text{ sınırlı}\}$ olsun. X üzerinde metriği $d(f,g)=\sup_{x\in E}\{|f(x)-g(x)|\}$ ile verelim. (X,d) metrik uzayı ayrılabilir değildir. E sonsuz olduğundan, $I=2^E$ sayılamaz kümedir. $A\in 2^E$ için $f_A(x)=\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$ ile tanımlayalım. $f_A: E\to\mathbb{R}$ sınırlı olduğundan $f_A\in X$ dir. $A,B\in 2^E$, $A\neq B$ için $f_A\neq f_B$ ve $d(f_A,f_B)=1$ dir. $U_A=B_{1/3}(f_A)=\{g\in X \mid d(g,f_A)<\frac{1}{3}\}$ olsun. U_A, X'in boş olmayan açık kümesidir. $A\neq B$ için $U_A\cap U_B=\emptyset$ olduğundan $\{U_A\}_{A\in I}$ açık kümeler ailesi, yukarıdaki teoremin şartlarını sağlar, bu yüzden, (X,d) ayrılabilir değildir.

Not: Eğer, $E=\mathbb{N}$ ise $X=\ell^\infty$; $\mathbb{R}$'de sınırlı diziler uzayı, ayrılabilir değildir.

Teorem: (X,τ) ayrılabilir normal uzay ve Y, X'in kapalı diskrit altuzayı olsun. Bu durumda, Y'nin kardinalitesi c veya daha büyük olamaz.

Kanıt: $S\subset Y$ olsun. S ve $Y-S$, Y'de kapalı ve Y'de X'de kapalı olduğundan S ve $Y-S$, X'de de kapalıdır. X normal uzay olduğundan, öyle U_S ve $V_S\in\tau$ kümeleri vardır ki $S\subset U_S\in\tau$, $Y-S\subset V_S$ ve $U_S\cap V_S=\emptyset$ dir.

M, X'de sayılabilir yoğun küme ve $f: 2^Y\to 2^M$, $f(S)=M\cap U_S$ ile tanımlansın. f'nin bire-bir fonksiyon olduğunu gösterelim. $S,T\subset Y$, $S\neq T$ olsun. $S-T\neq\emptyset$ olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda, $U_S\cap V_T\neq\emptyset$ dir. M, X'de yoğun olduğundan, $M\cap U_S\cap V_T\neq\emptyset$ dir. Diğer taraftan, U_T ve V_T'nin seçiminden $M\cap U_T\cap V_T=\emptyset$ olmalıdır. Sonuç olarak, $M\cap U_S\neq M\cap U_T$ dir. Yani, $f(S)\neq f(T)$ dir.

f'nin bire-birliğinden 2^Y'nin kuvveti $\leq 2^M$'nin kuvveti $\leq 2^{\mathbb{N}}=c$ ve Y'nin kuvveti $<2^Y$'nin kuvveti olduğu için Y'nin kardinalitesi c olamaz. ($|2^Y|\leq|2^M|\leq 2^{\mathbb{N}}=c$ ve $|Y|<|2^Y|$.) ■

Bu teoremi kullanarak, sayfa 77'de verilen örneği ($\mathbb{R}^2$'de Sorgenfrey topolojisi) tekrar inceleyebiliriz. Örnekte, $\mathbb{R}^2$'de verilen Sorgenfrey topolojisinde $\mathbb{R}^2$ ayrılabilir ve Y'nin kardinalitesi c olduğundan, verilen topolojide $\mathbb{R}^2$ normal uzay olamaz.

Tanım: (X,τ) topolojik uzay ve $x_0\in X$ olsun. $\mathcal{B}_{x_0}$, x_0'ı içeren öyle komşuluklar ailesidir ki x_0'ı içeren keyfi $U_{x_0}\in\tau$ için $x_0\in V\subset U_{x_0}$ olacak şekilde $V\in\mathcal{B}_{x_0}$ vardır. Bu şekilde tanımlanan $\mathcal{B}_{x_0}$'a x_0'ın bir <u>yerel bazı</u> denir.

Örnek: $(\mathbb{R},\tau)$ doğal topolojide, $\mathcal{B}_x=\{B_{1/n}(x) \mid n\in\mathbb{N}\}$ alalım. $\mathcal{B}_x$, x'in bir yerel bazıdır.

x'i içeren bir komşuluk U_x olsun. Bu durumda, öyle $r>0$ reel sayısı vardır ki $B_r(x) \subset U_x$ dir. $\frac{1}{n} < r \Rightarrow n > \frac{1}{r}$ ise $B_{1/n}(x) \subset B_r(x)$ olacağından $B_{1/n}(x) \subset U_x$ dir.

Tanım: (X, τ) topolojik uzay olsun. X'in her $x \in X$ elemanının sayılabilir yerel bazı varsa, bu topolojik uzaya <u>birinci sayılabilir uzay</u> denir.

Örnekler: 1) $(\mathbb{R}, \tau)$, birinci sayılabilir uzaydır.

2) 20.05.2015 (Final Sınavı) Soru 2: b) (7 puan) $(\mathbb{R}, \tau_z)$ Zariski topolojik uzayı sayılabilir değildir.

Çözüm: Birinci sayılabilir uzay olduğunu kabul edelim. $\mathcal{B}_{x_0}$, x_0'ın sayılabilir yerel bazı olsun. $\mathcal{B}_{x_0} = \{B_k \mid x_0 \in B_k, k=1,2,\dots\}$ yazabiliriz. $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ olduğundan $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset$ dir. Bu kümede x_0'dan başka en az bir $y_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ elemanı vardır. Eğer yoksa

$$\mathbb{R} - \{x_0\} = \mathbb{R} - \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(\mathbb{R} - B_k)}_{\text{sonlu}}$$

en fazla sayılabilir olur ki, bu ise çelişkidir. $x_0 \in \{y_0\}^c \in \tau_z$ dir ve keyfi $k=1,2,\dots$ için $B_k \not\subset \{y_0\}^c$ olduğundan $\mathcal{B}_{x_0}$'ın yerel baz olması ile çelişir. $(\mathbb{R}, \tau_z)$ birinci sayılabilir uzay değildir.

Teorem: (X, τ) birinci sayılabilir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $a \in X$ olsun. $a \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart a'ya yakınsayan A'da bir yakınsak $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin olmasıdır.

Kanıt: $a \in \overline{A}$ olsun. (X, τ) birinci sayılabilir uzay olduğundan a'nın öyle bir sayılabilir yerel bazı vardır ki $\mathcal{B}_a = \{B_n \mid a \in B_n, n \in \mathbb{N}\}$ dır. $B_1 \cap B_2 \cap \cdots B_n$ yardımıyla $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ olarak yazabiliriz. $a \in \overline{A}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \cap A \neq \emptyset$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B_n \cap A$ alalım. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi A'dadır ve $x_n \to a$ dır. Gerçekten, U_a, a'nın herhangi bir komşuluğu ise $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır ki $B_N \subset U_a$ ve $n > N$ için $x_n \in U_a$ dır. (Yani, $x_n \to a$ dır.)

Tersi, açıktır. ■

8.2 İkinci Sayılabilir Uzay

Tanım: (X,τ) topolojik uzayında, τ sayılabilir baza sahip ise bu topolojik uzaya ikinci sayılabilir uzay denir.

Örnekler: 1) $(\mathbb{R},\tau)$ diskrit topolojik uzayı birinci sayılabilir, fakat ikinci sayılabilir uzay değildir. $\mathcal{B}_x=\{x\}$ alındığında $\mathcal{B}_x$ sayılabilir, dolayısıyla birinci sayılabilir uzaydır. Bu topolojik uzayın en zayıf bazı $\beta=\{\{x\}\mid x\in\mathbb{R}\}$ dir. β sayılabilir değildir, dolayısıyla ikinci sayılabilir olamaz.

2) $(\mathbb{R},\tau_L)$ sol topolojisi (Yani, $\tau_L=\{(-\infty,a)\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R},\emptyset\}$) ikinci sayılabilirdir. Gerçekten, $\beta=\{(-\infty,b)\mid b\in\mathbb{Q}\}\cup\{\emptyset\}$, τ için bazdır. ($a\in\mathbb{R}$ için $a_n\in\mathbb{Q}$, $a_n\to a$ vardır, bu yüzden $(-\infty,a)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,a_n)$ ve $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,n)$). β sayılabilir olduğundan $(\mathbb{R},\tau_L)$ ikinci sayılabilirdir.

Teorem: İkinci sayılabilir uzay, birinci sayılabilirdir.

Kanıt: (X,τ) ikinci sayılabilir uzay ve $\beta=\{B_k\mid B_k\in\tau\}$, τ'nun sayılabilir bazı olsun. $\mathcal{B}_x=\{B\in\beta\mid x\in B\}$ alalım. U_x, x'in keyfi komşuluğu olsun. $U_x\in\tau$ olduğundan $U_x=\bigcup_k B_k$ dır. $x\in B_k\subset\bigcup_k B_k=U_x$ vardır. $\mathcal{B}_x$, x'in bir yerel bazıdır ve sayılabilir sayıdadır. Dolayısıyla, uzay birinci sayılabilir uzaydır. ■

Teorem: İkinci sayılabilir uzay, ayrılabilir uzaydır.

Kanıt: $\beta=\{B_k\mid B_k\in\tau\}$, τ'nun sayılabilir bir bazı olsun. x_k, B_k'nın herhangi bir elemanı ve $M=\{x_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ olsun. $\forall U\in\tau$ ve $U\neq\emptyset$ için $U\cap M\neq\emptyset$ olduğundan (Çünkü, $U=\bigcup_m B_m$ bazı m'ler için) $\overline{M}=X$ dir. M sayılabilir olduğundan uzay ayrılabilirdir. ■

Teorem: (X,τ) ikinci sayılabilir uzay ve $Y\subset X$ olsun. (Y,τ_Y) altuzayıda ikinci sayılabilir (dolayısıyla ayrılabilir) uzaydır.

Kanıt: Çalışma sorusu. ■

Örnek: $\tau=\{A\subset\mathbb{R}\mid 0\in A\}\cup\{\emptyset\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\tau)$ topolojik uzayı ikinci sayılabilir uzay değildir. $\mathbb{R}-\{0\}$ diskrit ve sayılamaz olduğundan, bu topolojik uzayın en zayıf bazı $\beta=\{\{x,0\}\mid x\in\mathbb{R}-\{0\}\}$ dır. Dolayısıyla, ikinci sayılabilir değildir.

Dikkat: Bu uzay ayrılabilirdir. Bu uzayın, $\mathbb{R}-\{0\}$ alt uzayı ayrılabilir değildir.

Teorem: (X,d) metrik uzay olsun. Metrik uzay ile doğrulan topolojinin ikinci sayılabilir olması için gerek ve yeter şart ayrılabilir olmasıdır.

Kanıt: Çalışma sorusu.

Teorem: Düzenli, ikinci sayılabilir uzay, normaldir.

Kanıt: Çalışma sorusu.